

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для студентов по выполнению
практических работ**

по учебной дисциплине

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

**Укрупненная группа: 20.00.00 Техносферная безопасность и
природообустройство**

**Специальность: 20.02.04 Пожарная безопасность
(базовый уровень подготовки)**

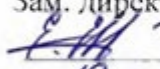
Квалификация: техник

Форма обучения: очная

г. Южно-Сахалинск
2025г.

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора по НМР

 Е.Н. Ермоласва

« 19 » 05 2025 г.

Составитель: Ким А.Х. преподаватель ПТК СахГУ

Одобрена на заседании ПЦК

Естественно-научных и математических дисциплин

Протокол № 9 от « 05 » 05 2025 г.

Председатель ПЦК

 А.А. Ицак

Содержание

1. Образовательный маршрут выполнения практических работ по ЕН.01 Математика

Разделы и темы практических работ	Количество часов	Формы и методы контроля
Раздел 1. Основы математического анализа	4	
Тема 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление	4	
Практическое занятие № 1. Неопределенный и определенный интегралы.	2	тестирование
Практическое занятие № 2. Определенный интеграл.	2	-самостоятельная работа -рефлексия
Тема 1.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения	2	
Практическое занятие № 3. Линейные дифференциальные уравнения.	2	-семинарское занятие -решение примеров
Тема 1.3. Теория рядов	2	
Практическое занятие № 4. Исследование на сходимость числовых рядов.	2	конспектирование -решение задач
Раздел 2. Основы дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики	2	
Тема 2.1. Множества и отношения	2	
Практическое занятие № 5. Операции над множествами.	2	-контрольная работа
Тема 2.3. Вероятность события, теоремы сложения и умножения	2	
Практическое занятие № 6. Решение простейших задач на определение вероятности с опорой на теоремы.	2	-самостоятельная работа -устный опрос
Тема 2.4. Математическая статистика	2	
Практическое занятие № 7. Вариационные ряды и их характеристики. Основы математической теории выборочного метода. Дисперсионный, корреляционный, регрессионный анализ. Контрольная работа	2	-конспектирование -письменный отчет
Раздел 3. Элементы линейной алгебры	6	
Тема 3.1. Элементы линейной алгебры	6	
Практическое занятие № 8. Определители квадратных матриц, свойства определителей. Системы линейных уравнений и их решение	2	-письменная работа
Практическое занятие № 9. Контрольная работа	2	-письменный опрос
Практическое занятие № 10. Дифференцированный зачет	2	- дифференцированный зачет
Итого:	20	

2. Содержание практических занятий

Раздел 1. Основы математического анализа

Тема 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление

Практическое занятие №1. Неопределенный и определенный интегралы. Методы интегрирования в неопределенном интеграле

Количество часов – 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание:

Ответить на вопросы теста, выбрав правильный ответ. Для того, чтобы выбрать правильный ответ необходимо обратиться к теоретическому материалу (см.предложенную литературу по данной теме)

1. Функция F называется первообразной для функции f на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка существует производная

$F'(x)$, равная $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$ это...

- а) формула Ньютона-Лейбница
 - б) дифференциал функции
 - в) первообразная для функции f
 - г) производная в точке
2. Множество первообразных для данной функции $f(x)$ называется...
- а) функцией
 - б) неопределенным интегралом
 - в) постоянным множителем
 - г) частной производной
3. Операция нахождения неопределенного интеграла называется...
- а) дифференцированием функции
 - б) преобразованием функции
 - в) интегрированием функции
 - г) нет верного ответа
4. Непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям это...
- а) методы нахождения производной
 - б) методы интегрирования
 - в) методы решения задачи Коши
 - г) все ответы верны
5. Производная от неопределенного интеграла равна...
- а) подынтегральной функции
 - б) постоянной интегрирования
 - в) переменной интегрирования
 - г) любой функции
6. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен...
- а) произведению интегралов этих функций
 - б) разности этих функций
 - в) алгебраической сумме их интегралов
 - г) интегралу частного этих функций
7. Определенный интеграл вычисляют по формуле...
- а) $\int_A^B f(x)dx = F(a)-F(b)$
 - б) $\int_A^B f(x)dx = F(b)-F(a)$
 - в) $\int_A^B f(x)dx = F(a)+F(b)$
 - г) $\int_A^B f(x)dx = F(a)$

8. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен...

- а) единице
- б) бесконечности
- в) нулю
- г) указанному пределу

9. При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл...

- а) остается прежним
- б) меняет знак
- в) увеличивается в два раза
- г) равен нулю

10. Определенный интеграл используется при вычислении...

- а) площадей плоских фигур
- б) объемов тел вращения
- в) пройденного пути
- г) всех перечисленных элементов

11. Формула Ньютона-Лейбница

а) $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

б) $\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b)$

в) $\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b) + \tilde{n}$

г) $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) + \tilde{n}$

12. Вычисление пути, пройденного материальной точкой производится по формуле:

а) $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

б) $S = \int f(t)dt$

в) $S = \int_{t_2}^{t_1} f(t)dt$

г) $S = dt \int_{t_1}^{t_2} f(t)$

13. Если криволинейная трапеция, ограниченная линией $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси x , то объем вращения вычисляется по формуле

а) $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

б) $V = \pi \int_a^b x^2 dx$

в) $V = \pi \int_b^a y^2 dx$

г) $V = \pi \int_b^a x^2 dx$

14. Если $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой линией, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$, вычисляется по формуле

а) $S = \int_a^b f(x) dx$

б) $S = \int_b^a f(x) dx$

в) $S = \int f(x) dx$

г) $S = f(x) \int_a^b dx$

15. Укажите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - \sin x$

а) $F(x) = x^3 + \cos x$

б) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x$

в) $F(x) = x^2 + \cos x$

г) $F(x) = 2 - \cos x$

16. Определенный интеграл $\int_1^2 4x^3 dx$ равен

а). 36; б). 17; в). 16; г). 15

17. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$ определяется интегралом

а). $\int_{-2}^0 (4 - x^2) dx$; б). $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$; в). $\int_0^4 (4 - x^2) dx$; г). $\int_0^2 (4 - x^2) dx$

18. В результате подстановки $t = 3x + 2$ интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2}}$ приводится к виду

а). $\int \frac{dx}{\sqrt{t}}$; б). $\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$; в). $3 \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$; г). $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$

9. Определенный интеграл $\int_2^3 3x^2 dx$ равен

а). 19; б). 18; в). 35; г). 27

20. Множество всех первообразных функции $y = 5x^4$ имеет вид

а). x^5 ; б). $5x^5 + C$; в). $x^5 + C$; г). $5x^3 + C$

Форма контроля: тест

Тема: Дифференциальное и интегральное исчисление

Практическое занятие № 2. Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла к решению прикладных задач.

Количество часов – 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл: 1) $\int_1^2 6dx$; 2) $\int_{01}^4 x^2 dx$; 3) $\int_0^\pi -3\cos 2x dx$; 4) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$;
 5) $\int_1^3 (x^2 + 5x - 8)dx$; 6) $\int_0^2 (4x^2 + x - 3)dx$
2. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:
 1). $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$.
 2). $y = x^2$; $y = 2x - x^2$.
4. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
 $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

Вариант 2

1. Вычислить определенный интеграл: 1) $\int_1^3 4dx$; 2) $\int_{-1}^2 x^3 dx$; 3) $\int_0^\pi 2\cos 3x dx$;
 4) $\int_1^4 \frac{dx}{(2x+3)^3}$; 5) $\int_1^4 (x^2 - 5x + 8)dx$ 6). $\int_0^3 (2x^2 - x + 4)dx$
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки:
 $\int_0^1 (3x + 1)^4 dx$
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:
 1). $y = -x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$;
 2). $y = x^2 - 4x + 4$; $y = 4 - x^2$.
4. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
 $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Занимательно:

Вычислите определённые интегралы и вы узнаете одно из высказываний французского математика С.Д.Пуассона.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$	$\int_0^2 x^2 dx$	$\int_1^e \frac{dx}{x}$	$\int_1^4 \sqrt{x} dx$	$\int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int_0^1 6dx$	$\int_{-1}^1 4x^3 dx$	$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\int_{\pi}^{\pi/2} (\cos x + \sin x) dx$

Жизнь	-1	Тремя	-16
Двумя	1	Вещами	7
Занятием	$-\sqrt{3/3}$	И	0
Математикой	6	Арифметикой	$\ln 3/2$
Преподаванием	0	Её	3
Украшается	$\frac{8}{3}$	Забытием	0

Форма контроля: самостоятельная работа по вариантам

Рефлексия: Учащимся предлагается оценить свою работу на Занятии по 10 балльной системе, последовательно отвечая на вопросы:

1. Как я усвоил материал?
 - получил прочные знания (9 – 10 баллов);
 - усвоил (новый) материал частично (7—8 баллов);
 - мало понял, необходимо еще поработать (4—6 баллов).
2. Как я работал?
 - работал хорошо (9 – 10 баллов);
 - допустил ошибки (7 – 8 баллов);
 - не справился со многими заданиями (указать какими) (4 – 6 баллов).
3. Как работала учебная пара?
 - дружно все (9 – 10 баллов);
 - не все активны (7—8 баллов);
 работа вялая, много ошибок (4 – 6 баллов)

Тема: Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Линейные дифференциальные уравнения. Решение однородных и линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков

Количество часов – 2

Методические рекомендации по выполнению

План семинара:

Задание 1. Линейные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Примеры

Задание 2. Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка

Задание 3. Решение однородных и линейных дифференциальных уравнений второго порядков

Задание 4. Практическая работа по решению линейных дифференциальных уравнений. Решение однородных и линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Форма контроля: семинар

Тема: Теория рядов

Практическое занятие № 4. Теория рядов

Исследование на сходимость числовых рядов. Определение радиуса сходимости числового ряда, разложение функции в ряд Тейлора

Количество часов – 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1.

1. Изучить теоретические сведения по теории рядов:

В общем виде **положительный числовой ряд** можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Здесь $\sum$ – математический значок суммы; a_n – **общий член ряда** (запомните этот простой термин);

n – переменная-«счётчик».

Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ обозначает, что проводится суммирование от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n=1$, затем $n=2$, потом $n=3$, и так далее – до бесконечности. Вместо переменной n иногда используется переменная k или m . Суммирование не обязательно

начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, с двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$ либо с любого *натурального числа*.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

– и так далее, до бесконечности. Будем считать, что ВСЕ слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ – это **неотрицательные** числа. То есть, речь пойдет о **положительных числовых рядах**.

Пример 1

Записать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$

Сначала $n=1$, тогда: $2 \cdot 1 + 1 = 3$

Затем $n=2$, тогда: $2 \cdot 2 + 1 = 5$

Потом $n=3$, тогда: $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Процесс можно продолжить до бесконечности, но по условию требовалось написать первые

три члена ряда, поэтому записываем ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3 + 5 + 7 + \dots$

Обратите внимание на принципиальное отличие **от числовой последовательности**, в которой члены не суммируются, а рассматриваются как таковые.

Пример 2

Записать первые три члена ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

Пример 2: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \dots$

Примечание: обратите внимание, что переменная-«счётчик» в данном примере «заряжается» со значения $n=2$

Пример 3

Записать первые три члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3) \cdot 5^n}$$

На самом деле задание выполняется устно: **мысленно подставляем в общий член ряда** сначала $n=1$, потом $n=2$ и $n=3$. В итоге:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3) \cdot 5^n} = \frac{\sqrt{2}}{1 \cdot 5^1} + \frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 5^2} + \frac{\sqrt{4}}{9 \cdot 5^3} + \dots$$

Ответ оставляем в таком виде, **полученные члены ряда лучше не упрощать**, то есть не

выполнять действия: $\frac{\sqrt{2}}{1 \cdot 5^1} = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $\frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 5^2} = \frac{\sqrt{3}}{125}$, $\frac{\sqrt{4}}{9 \cdot 5^3} = \frac{2}{1125}$. Почему? Ответ в

виде $\frac{\sqrt{2}}{1 \cdot 5^1} + \frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 5^2} + \frac{\sqrt{4}}{9 \cdot 5^3} + \dots$ гораздо проще и удобнее проверять преподавателю. Иногда встречается обратное задание

Пример 4

Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots$$

Здесь нет какого-то четкого алгоритма решения, *закономерность нужно просто увидеть*.

В данном случае:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

Для проверки полученный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ можно «расписать обратно» в развернутом виде. А вот пример чуть сложнее для самостоятельного решения:

Пример 5

Записать сумму в свёрнутом виде с общим членом ряда

$$\frac{2}{\sqrt[3]{7}} + \frac{4}{\sqrt[3]{14}} + \frac{8}{\sqrt[3]{21}} + \dots$$

Выполнить проверку, снова записав ряд в развернутом виде.

Пример 5 Решение: :
$$\frac{2}{\sqrt[3]{7}} + \frac{4}{\sqrt[3]{14}} + \frac{8}{\sqrt[3]{21}} + \dots = \frac{2}{\sqrt[3]{7 \cdot 1}} + \frac{2^2}{\sqrt[3]{7 \cdot 2}} + \frac{2^3}{\sqrt[3]{7 \cdot 3}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[3]{7n}}$$

Сходимость числовых положительных рядов Необходимый признак сходимости ряда

Одной из ключевых задач теории числовых рядов является **исследование ряда на сходимость**. При этом возможны два случая:

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **расходится**.

Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots = \infty$. Хороший пример расходящегося числового ряда встретился в начале урока:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3 + 5 + 7 + \dots$$

Здесь совершенно очевидно, что каждый следующий член ряда – больше, чем предыдущий, поэтому $3 + 5 + 7 + \dots = \infty$ и, значит, ряд расходится. Чуть ниже мы рассмотрим более строгий математический критерий для данного примера.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**.

Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому *конечному числу* S $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots = S$. В качестве примера сходящегося числового ряда можно привести бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, известную нам со

школы: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$. Сумму членов бесконечно убывающей геометрической

прогрессии можно найти по формуле: $S = \frac{A}{1-q}$, где A – первый член прогрессии, q – основание прогрессии. В данном случае: $A=1$, $q = \frac{1}{4}$. Таким

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

образом:

Получено конечное число, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ сходится, что и требовалось доказать.

В подавляющем большинстве случаев **найти сумму ряда** не так-то просто, и поэтому на практике для исследования сходимости ряда используют специальные признаки, которые доказаны теоретически.

Существует несколько признаков сходимости ряда:

- *необходимый признак сходимости ряда,*
- *признаки сравнения,*
- *признак Даламбера,*
- *признаки Коши,*

некоторые другие признаки. **Когда какой признак применять?** Это зависит от общего члена ряда a_n , образно говоря – от «начинки» ряда.

Мы рассмотрим необходимый признак сходимости ряда и признаки сравнения. ! Для дальнейшего усвоения урока необходимо хорошо понимать, что такое предел и хорошо уметь

раскрывать неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Необходимый признак сходимости ряда

Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится. Или короче:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

В качестве «динамической» переменной вместо «икса» у нас выступает n . Букву можно заменить другой буквой, и это не страшно, однако есть разница с содержательной точки зрения. Освежим наши знания: пределы с «иксом» называют **пределами функций**, а пределы с переменной «эн» – **пределами числовых последовательностей**. Очевидное отличие состоит в том, что переменная «эн» принимает дискретные (прерывные) натуральные значения: 1, 2, 3 и т.д. Но данный факт мало сказывается на методах решения пределов и способах раскрытия неопределенностей.

Докажем, что ряд из первого примера $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$ расходится. Общий член ряда: $a_n = 2n+1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = \infty \neq 0$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)$ **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Необходимый признак сходимости ряда довольно часто встречается в практических заданиях:

Пример 6

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n+3}$

В числителе и знаменателе у нас находятся многочлены.

Когда старшие степени числителя и знаменателя равны, тогда предел равен конечному числу.

Решаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{7n+3} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Делим числитель и знаменатель на n

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{7n+3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{7} \neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пример 7

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 3n + 1}{n^2 + 4}$

Это пример для **самостоятельного решения**.

Решение: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n + 1}{n^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$

Делим числитель и знаменатель на n^3

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3 - 3n + 1}{n^3}}{\frac{n^2 + 4}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^3}} = \frac{1}{0} = \infty \neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Итак, когда нам дан **ЛЮБОЙ** ряд, в первую очередь проверяем (мысленно или на черновике): а стремится ли общий член к нулю? Если не стремится – оформляем решение по образцу примеров №№6,7 и даём ответ о том, что ряд расходится.

Какие типы очевидно расходящихся рядов мы рассмотрели? Сразу понятно, что расходятся

ряды вроде $\sum_{n=1}^{\infty} n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$. Также расходятся ряды из примеров №№6, 7:

когда в числителе и знаменателе находятся многочлены, и старшая степень числителя больше либо равна старшей степени знаменателя.

Во всех этих случаях при решении и оформлении примеров мы используем необходимый признак сходимости ряда.

Почему признак называется **необходимым**?

Понимайте самым естественным образом: для того, чтобы ряд сходил, **необходимо**, чтобы его общий член стремился к нулю; но этого еще – **не достаточно**, ... возможно удачнее будет так: **если общий член ряда стремится к нулю, ТО ЭТО ЕЩЕ НЕ ЗНАЧИТ, что ряд**

сходится – он может, как сходиться, так и расходиться! И в таких случаях для решения примеров нужно использовать другие признаки.

Знакомьтесь: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Данный ряд называется **гармоническим рядом**. Пожалуйста, запомните! Легко заметить,

что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, НО. В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**.

Также следует запомнить понятие **обобщенного гармонического ряда**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

1) Данный ряд **расходится** при $\alpha \leq 1$.

Например, расходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2) Данный ряд **сходится** при $\alpha > 1$.

Например, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Еще раз подчеркиваю, что почти во всех практических заданиях нам совершенно не важно,

чему равна сумма, например, ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, **важен сам факт его сходимости**.

Это элементарные факты из теории рядов, которые уже доказаны, и при решении какого-нибудь практического примера можно смело ссылаться, например, на расходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ или сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Признаки сравнения для положительных числовых рядов

Существуют два признака сравнения, один из них называют просто *признаком сравнения*, другой – *предельным признаком сравнения*.

Сначала рассмотрим **признак сравнения**. На практике он встречается довольно редко, но эта статья была бы неполной без данной информации.

Признак сравнения:

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – **сходится**, и выполнено неравенство $a_n \leq b_n$ (для $n = 1, 2, 3, \dots$),

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **тоже сходится**.

Иными словами: Из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами.

Пример 8

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 2}$

Заглядываем в «пачку» обобщенного гармонического ряда и находим похожий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Из теории известно, что он сходится. Теперь нам нужно показать, что для всех значений $n = 1, 2, 3, \dots$ справедливо неравенство $\frac{1}{n^2 + n + 2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Если $n = 1$, то $\frac{1}{4} < 1$

Если $n = 2$, то $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$

Если $n = 3$, то $\frac{1}{14} < \frac{1}{9}$

Если $n = 4$, то $\frac{1}{22} < \frac{1}{16}$

....

И так далее.

Оформить решение можно так:

Сравним исследуемый ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Используем признак сравнения. Для рассматриваемых рядов выполнено неравенство $\frac{1}{n^2 + n + 2} \leq \frac{1}{n^2}$, значит, по признаку сравнения исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

В принципе, можно расписать и подробнее, указав, что неравенство выполняется для нескольких первых членов.

Проанализируем признак сравнения и решенный пример с неформальной точки зрения. Все-

таки, почему ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 2}$ сходится? А вот почему. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то он имеет

некоторую *конечную* сумму S : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = S$. И поскольку все члены

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 2}$ **меньше** соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, то сумма ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 2}$ **не** может быть больше числа S , и тем более, не может равняться бесконечности!

Аналогично можно доказать сходимость «похожих» рядов:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n^2 + 5}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 2n^2 + 3n + 7}$ и т.д.

! Обратите внимание, что во всех случаях в знаменателях у нас находятся «плюсы». Наличие хотя бы одного минуса может серьёзно осложнить использование рассматриваемого признака сравнения.

Например, если ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ таким же образом сравнить со сходящимся рядом

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (выпишите несколько неравенств для первых членов), то условие $a_n \leq b_n$ не будет выполняться вообще! Здесь можно извернуться и подобрать для сравнения другой

сходящийся ряд, например, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, но это повлечёт за собой лишние оговорки и другие

ненужные трудности. Поэтому для доказательства сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ гораздо проще использовать *предельный признак сравнения* (см. следующий параграф).

Пример 9

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

В примере я предлагаю самостоятельно рассмотреть вторую «зеркальную» часть

теоремы: Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – **расходится**, и выполнено неравенство $a_n \geq b_n$

(для $n = 1, 2, 3, \dots$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **тоже расходится**. Иными словами: **Из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами**.

Что нужно сделать? Нужно сравнить исследуемый ряд с расходящимся гармоническим

рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$: построить несколько неравенств и сделать вывод о справедливости неравенства $a_n \geq b_n$. *Пример 9:*

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Используем признак сравнения:

$$\text{Если } n = 2, \text{ то } \frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{2}$$

$$\text{Если } n = 3, \text{ то } \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{3}$$

$$\text{Если } n = 4, \text{ то } \frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{4}$$

Таким образом, для всех членов ряда выполнено неравенство $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, значит, по признаку

сравнения исследуемый ряд **расходится** вместе с гармоническим рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Примечание: И здесь есть неформальный смысл. Доказано, что гармонический ряд расходится, следовательно, сумма его членов: $S = \infty$. Мы показали, что члены ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ещё больше членов ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, и совершенно понятно, что сумма ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ не может быть меньше бесконечности.

Как уже отмечалось, на практике только что рассмотренный признак сравнения применяют редко. Настоящей «рабочей лошадкой» числовых рядов является *предельный признак сравнения*, и по частоте использования с ним может конкурировать разве что **признак Даламбера**.

Предельный признак сравнения числовых положительных рядов

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общих членов этих рядов равен **конечному, отличному от нуля числу** A : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, то оба ряда **сходятся или расходятся одновременно**.

Когда применяется предельный признак сравнения?

Предельный признак сравнения применяется тогда, когда «начинкой» ряда у нас являются многочлены. Либо один многочлен в знаменателе, либо многочлены и в числителе и в знаменателе. Один или оба многочлена также могут находиться под корнем.

Пример 10

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Используем предельный признак сравнения. Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится. Если нам удастся показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ равен **конечному, отличному от нуля числу**, то будет доказано, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ – тоже сходится.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

Получено конечное, отличное от нуля число, значит, исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Почему для сравнения был выбран именно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

Если бы мы выбрали любой другой ряд из «обоймы» обобщенного гармонического ряда, то у нас не получилось бы в пределе **конечного, отличного от нуля** числа (можете поэкспериментировать).

Примечание: когда мы используем предельный признак сравнения, **не имеет значения**, в каком порядке составлять отношение общих членов, в рассмотренном примере отношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 - n}}{\frac{1}{n^2}}$$

можно было составить наоборот: $\frac{1}{n^2} - \text{это не изменило бы сути дела.}$

Предельный признак сравнения применим почти для всех рядов, которые мы рассмотрели в

предыдущем пункте: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 2}$

$$, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n^2 + 5}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 2n^2 + 3n + 7}.$$

Данные ряды по только что рассмотренной трафаретной схеме нужно предельно сравнить соответственно со сходящимися рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Пример 11

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

Это пример для самостоятельного решения.

Что делать, если многочлены находятся и в знаменателе, и в числителе? Алгоритм решения почти такой же – нам нужно подобрать для сравнения подходящий ряд из «обоймы» обобщенного гармонического ряда.

Пример 12

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{2n^4 - n + 5}}$

Мы видим, что и в числителе и в знаменателе у нас многочлены, причем, в знаменателе многочлен находится под корнем.

Подбираем ряд для сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^?}$.

1) Сначала нужно найти *старшую степень знаменателя*. Если бы не было корня, то, понятно, что старшая степень знаменателя равнялась бы четырем. Что делать, когда есть корень? Повторение – мать учения: мысленно или на черновике отбрасываем все члены, кроме старшего: $\sqrt{2n^4}$. Если есть константа, её тоже отбрасываем: $\sqrt{n^4}$. Теперь извлекаем корень: $\sqrt{n^4} = n^2$. Таким образом, старшая степень знаменателя равна **двум**.

2) Выясняем старшую степень числителя. Очевидно, что она равна **единице**.

3) Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя: $2 - 1 = 1$

Таким образом, наш ряд нужно сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, то есть, с расходящимся гармоническим рядом.

Само оформление решения должно выглядеть примерно так:

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Используем предельный признак сравнения:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n-1}{\sqrt{2n^4 - n + 5}}}{\frac{1}{n}} \stackrel{(2)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{\sqrt{2n^4 - n + 5}} \stackrel{(3)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{\sqrt{2n^4 - n + 5}} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &\stackrel{(4)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 - n}{n^2}}{\frac{\sqrt{2n^4 - n + 5}}{n^2}} \stackrel{(5)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 - n}{n^2}}{\frac{\sqrt{2n^4 - n + 5}}{\sqrt{n^4}}} \stackrel{(6)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 - n}{n^2}}{\sqrt{\frac{2n^4 - n + 5}{n^4}}} \stackrel{(7)}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} \rightarrow 0}{\sqrt{2 - \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 + \frac{5}{n^4} \rightarrow 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Получено конечное, отличное от нуля число, значит, исследуемый ряд **расходится** вместе с

гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

(1) Составляем отношение общих членов.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) Раскрываем в числителе скобки

4) Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ устраняем стандартным способом деления числителя и знаменателя на «эн» в старшей степени

(5) В самой нижней строке подготавливаем n^2 для внесения под корень: $n^2 = \sqrt{n^4}$

(6) В знаменателе организуем общий корень.

Примечание: на практике пункты 5,6 можно пропустить,

(7) Почленно делим числители на знаменатели. Помечаем члены, которые стремятся к нулю.

Пример 13

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3n^4 + 2n^2 + 7}$

Эти 3 пункта выполняем мысленно или на черновике:

1) Старшая степень знаменателя: 4

2) Старшая степень числителя: 1

3) $4 - 1 = 3$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Используем предельный признак сравнения:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}}{\frac{1}{n^3}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3(5n-1)}{3n^4+2n^2+7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^4-n^3}{3n^4+2n^2+7} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{5n^4-n^3}{n^4}}{\frac{3n^4+2n^2+7}{n^4}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^4}} \right) = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый ряд **сходится** вместе с

рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Задание 2.

1. Изучить вопрос о радиусе сходимости числового ряда и разложении функции в ряд Тейлора.
2. Уметь отвечать на вопросы теории

Радиус сходимости степенного ряда.

Так называют радиус круга сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ на комплексной плоскости

(или степенного ряда $\sum a_n x^n$ на действительной числовой оси), т.е. такое число r , что ряд сходится при $|z| < r$ (соответственно при $|x| < r$) и расходится при $|z| > r$ (соответственно при $|x| > r$). На границе круга сходимости ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда имеются несколько формул, например:

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \quad (\text{Формула Даламбера});$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\text{Формула Коши}).$$

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, если на этом интервале данный степенной ряд сходится к функции $f(x)$.

Рядом Тейлора функции $f(x)$ называется ряд, коэффициенты которого определяются по

формулам $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, то есть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ или ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x_0 $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$,

то ряд справа есть ее ряд Тейлора.

Короче: если функция представлена в виде степенного ряда, то этот ряд является ее рядом Тейлора.

Представление функции ее рядом Тейлора единственно.

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

$$1. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, \infty);$$

$$2. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, \infty);$$

$$3. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x \in (-\infty, \infty);$$

$$4. \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

$$|x| < 1;$$

$$5. \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$|x| < 1;$$

$$6. \quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$$

$$|x| < 1, m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

(в случае, когда m – натуральное число, функция $(1+x)^m$ раскладывается по формуле бинома Ньютона в многочлен);

$$7. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, |x| < 1$$

(последнее разложение является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $|x| < 1$).

Пример 8. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \sqrt[3]{27-x}$.

Решение. Зная разложение функции $(1+x)^m$ в биномиальный ряд, сходящийся на интервале $(-1,1)$, преобразуем данную функцию так, чтобы воспользоваться биномиальным рядом

$$\sqrt[3]{27-x} = \sqrt[3]{27\left(1-\frac{x}{27}\right)} = \sqrt[3]{1-\frac{x}{27}} = \left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся биномиальным разложением при $m = \frac{1}{3}$, полагая в разложении x равным $-\frac{x}{27}$:

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{27}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{x}{27}\right)^2 + \dots + \\ &+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}\left(-\frac{x}{27}\right)^n + \dots \end{aligned}, \text{ где } \left|-\frac{x}{27}\right| < 1.$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\dots\left(\frac{4}{3}-n\right)}{n!}\left(-\frac{x}{27}\right)^n = \\ &= 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\dots\left(\frac{4-3n}{3}\right)}{n!}\left(\frac{x}{27}\right)^n = \\ &= 1 - \frac{x}{27} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{3^{n-1} n!} \frac{x^n}{27^n} (-1)^n (-1)^{n-1} = \\ &= 1 - \frac{x}{27} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{n! 3^{n-1} \cdot 3^{3n}} x^n = \\ &= 1 - \frac{x}{27} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{n! 3^{4n-1}} x^n, |x| < 27. \end{aligned}$$

Форма контроля: Практическая работа

Раздел 2. Основы дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 5. Множества и отношения. Операции над множествами. Контрольная работа

Количество часов – 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

1. Прочитайте следующие записи, укажите среди них верные:

- а) $270 \in \mathbb{N}$; б) $-70 \in \mathbb{N}$; в) $-7 \in \mathbb{Q}$; г) $-7 \in \mathbb{Z}$;
 д) $1 \in \mathbb{N}$; е) $-7 \in \mathbb{R}$; ж) $0 \in \mathbb{N}$; з) $18 \in \mathbb{Z}$;

2. Даны множества: М- множество натуральных чисел, больших 4 и меньших 20; Р- множество натуральных чисел, оканчивающихся цифрой 7. Укажите, какому из этих множеств принадлежат числа 12, 17, 0, 3, 7. Запишите это с помощью символа " $\in$ ".

3. Перечислите элементы следующих множеств:

А - множество натуральных чисел, меньших 20;

В - множество натуральных чисел, больших 30;

С - множество чисел, модуль которых равен 5;

К - множество различных цифр числа 244003.

4. Прочитайте следующие записи. Каким способом заданы множества? Задайте, если это возможно, данные множества перечислением их элементов:

- а) $X_1 = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 8\}$;
 б) $X_2 = \{x/x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 6\}$;
 в) $X_3 = \{x/x \in \mathbb{N}, x \leq 0\}$;
 г) $X_7 = \{x/x \in \mathbb{Z}, x^2 + 5x + 7 = 0\}$;
 д) $X_8 = \{x/x \in \mathbb{N}, (x-1)/(x-2) < 1\}$.

5. Задайте следующие множества с помощью характеристического свойства:

- а) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; б) $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; в) $\emptyset$;
 г) $D = \{a, e, e, и, й, о, у, э, ю, я\}$.

6. Какие из следующих множеств являются пустыми? Какие из них числовые множества?

А - множество городов России с населением более 15 млн.;

В - множество параллелограммов с неравными противоположными сторонами;

С - множество двузначных чисел, меньших 6;

Д - множество натуральных чисел, меньших 1 ;

$E = \{x/x \in \mathbb{N}, 6 < x < 7\}$;

$K = \{x/x \in \mathbb{Z}, x^2 - 4 = 0\}$;

$L = \{x/x \in \mathbb{R}, x^2 + 25 = 0\}$.

7. Назовите элементы следующих множеств:

$A_1 = \{a, b, c\}$; $A_2 = \{a\}$; $A_3 = \{\{a\}\}$; $A_4 = \emptyset$; $A_5 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$; $A_6 = \{\emptyset\}$;

8. Изобразите на координатной прямой следующие множества:

- а) $A_1 = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 3\}$.
 б) $A_2 = \{x/x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\}$.

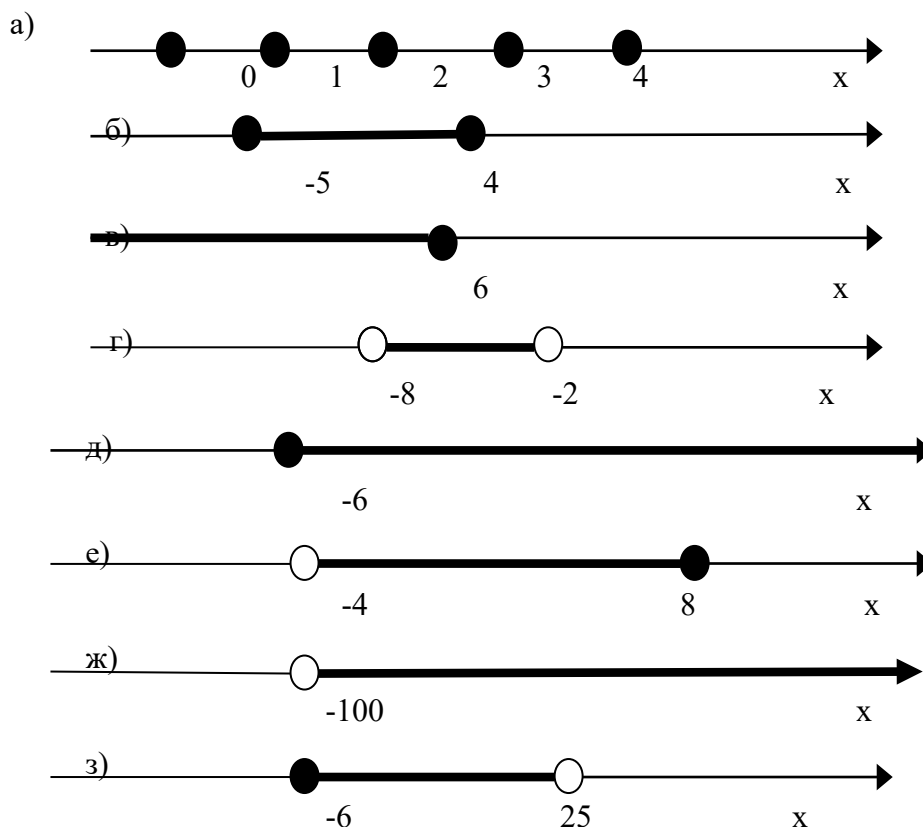
в) $A_3 = \{x/x \in \mathbb{R}, x > 3,2\}$.

г) $A_4 = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq -7\}$.

д) $A_5 = \{x/x \in \mathbb{R}, -2,7 \leq x \leq 0\}$.

е) $A_6 = \{x/x \in \mathbb{R}, -5 \leq x < -2\}$.

9. Запишите в виде числовых промежутков множества, изображенные на координатной прямой (рис. 10):



10. Установите вид отношений между множествами А и В, если:

а) А - множество равносторонних треугольников, В - множество равноугольных треугольников;

б) $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$.

в) $A = [2,3]$, $B = [3,4]$;

г) $A = (2,5)$, $B = [2,5]$;

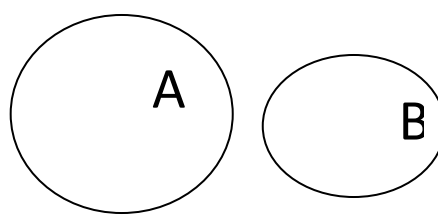
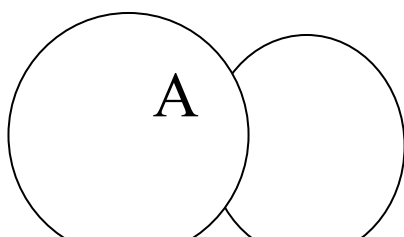
д) $A = (2, +\infty)$, $B = [2, +\infty]$;

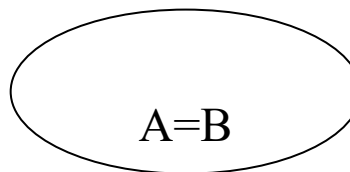
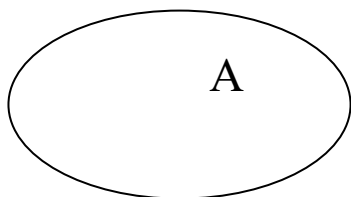
е) $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x:2\}$, $B = \mathbb{Z}$;

ж) $A = \{x/x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{R}, (x-2)^2 = 0\}$.

11. Установите вид отношения и постройте диаграмму Эйлера-Венна для множеств: Q - рациональных чисел, Z - целых чисел, R - действительных чисел, N - натуральных чисел, E - натуральных четных чисел, F - натуральных чисел, делящихся на 12.

12. Приведите примеры множеств А и В, если на диаграммах Эйлера-Венна их можно изобразить так, как показано на рис. 11.





13. Пусть A - множество значений выражения $(3,5 - 9a)$, при $a = -1; 0,35$.

Запишите все подмножества множества A .

14. Укажите верные утверждения:

- а) $\{1,2\} \subset \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1,2\}$;
- б) $\{1,2\} \subset \{\{1,2,3\}, \{1,2\}, 1,2\}$;
- в) $\{1,3\} \subset \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1,2\}$;
- г) $\{1,3\} \subset \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1,2\}$;
- д) $5 \subset \{1,2,3,4,5\}$;
- е) $\{5\} \subset \{4,5,6\}$;
- ж) $\emptyset \subset \{4,5,6\}$;
- з) $\emptyset \subset \{4,5,6\}$.

15. Укажите равные множества: A - множество ромбов с прямыми углами, B - множество квадратов; C - множество прямоугольников с конгруэнтными сторонами; D - множество четырехугольников с прямыми углами; E - множество прямоугольников.

16. Найдите пересечение и объединение множеств A и B , если:

- а) $A = \{a, b, c, k, n\}$, $B = \{n, e, b, c, p\}$;
- б) $A = \{a, b, c, k, n\}$, $B = \{a, c, k, b, n\}$;
- в) $A = \{a, b, c, k, n\}$, $B = \{a, c, k\}$;
- г) $A = \{a, b, c, k, n\}$, $B = \{p, e, m\}$;
- д) A - множество натуральных чисел, B - множество целых чисел, делящихся на 3;
- е) A - множество действительных корней уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$,

B - множество действительных корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$;

17. Используя координатную прямую, найти пересечение и объединение множеств A и B , если:

- а) $A = \{x/x \in \mathbb{Z}, x \geq -2\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{Z}, x \leq 8\}$;
- б) $A = \{x/x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq 8\}$;
- в) $A = \{x/x \in \mathbb{R}, 0 < x < 3,5\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{R}, -3 < x < 1\}$;
- г) $A = \{x/x \in \mathbb{R}, x < -1\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{R}, x > -1,2\}$;
- д) $A = \{x/x \in \mathbb{R}, -2,5 < x \leq 1\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{R}, 2 \leq x < 5,3\}$.

18. Укажите характеристическое свойство элементов множеств $P \cap Q$, $P \cup Q$, если:

- а) P - множество прямоугольников, Q - множество ромбов;
- б) P - множество чисел, кратных 5, Q - множество чисел, кратных 3;
- в) P - множество учащихся 3 класса, Q - множество мальчиков школы;
- г) P - множество равнобедренных треугольников, Q - множество равносторонних треугольников.

19. Пусть A - множество студентов увлекающихся психологией, B - множество студентов увлекающихся математикой. Сформулируйте условия при которых:

а) $A \cap B = \emptyset$;

б) $A \cup B = B$;

в) $A \cap B \neq \emptyset$;

г) $A \cup B \neq B$.

20. Найдите дополнение множества B до множества A , если:

а) $A = \{11, 12, 13, 14\}$, $B = \{7, 12\}$;

б) $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 5\}$;

в) A - множество студентов учебной группы; B - множество студентов этой же группы, сдавших сессию на отлично.

21. Даны множества: $A = \{x/x \in \mathbb{R}, -3,5 \leq x < 8\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 3\}$, $C = \{x/x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2\}$. Укажите характеристическое свойство элементов следующих множеств:

а) $A \setminus B$; б) $(A \setminus C) \cap B$; в) $B \setminus C$; г) $(B \setminus C) \cup A$; д) $C \cap (B \setminus A)$; е) $(B \cap C) \setminus A$.

29. Докажите равенства, используя определение операций над множествами и понятие равенства множеств:

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

35. Изобразите на координатной плоскости элементы декартова произведения множеств A и B , если:

а) $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$, $B = \{y/y \in \mathbb{N}, y \leq 2\}$.

б) $A = \{x/x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{y/y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1\}$.

в) $A = \{x/x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$, $B = \{y/y \in \mathbb{R}, 0 < y < 2\}$.

36. Из 40 учащихся класса 32 занимаются в математическом кружке, 21 - в кружке "Умелые руки", а 15 - в обоих кружках. Сколько учащихся класса не занимаются ни в том, ни в другом кружке?

41. В классе 30 человек, посещающих факультативные занятия по физике и математике. Известно, что углубленно изучают оба предмета 10 человек, а математику - 25. Сколько человек посещает факультативные занятия только по физике?

Раздел 2 Основы дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 6. Вероятность события, теоремы сложения и умножения

Решение простейших задач на определение вероятности с опорой на теоремы.

Количество часов – 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. Повторить теорию по вероятности события, теоремы сложения и умножения.

Задание 2. Рассмотреть порядок решения упражнений.

Задание 3. Выполнить самостоятельно решение.

1. Вероятность наступления события A в некотором испытании равна отношению $P(A) = \frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов данного испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A .

Как правильно оформлять решение и какими способами это можно сделать:

Задача 1

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение: важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

Всего в урне: $15 + 5 + 10 = 30$ шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно (**равновозможность исходов**), при этом исходы **элементарны** и образуют **полную группу событий** (т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30 шаров).

Таким образом, общее число исходов: $n = 30$

Рассмотрим событие: A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ **элементарных** исходов, поэтому по классическому определению:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.}$$

Здесь некорректно рассуждать, что «раз половина шаров белые, то вероятность извлечения

белого шара $P(A) = \frac{1}{2}$ ».

В классическом определении вероятности речь идёт об **ЭЛЕМЕНТАРНЫХ** исходах, и

дробь $\frac{15}{30}$ следует обязательно прописать!

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар

C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};$$

$$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Типичная проверка многих задач осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**.

В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

Проверим, так ли это:

в чём и хотелось убедиться.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

Пример решения:

Всего: $15 + 5 + 10 = 30$ шаров в урне. По классическому определению:

$$p_{\text{б}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \text{ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар;}$$

$$p_{\text{к}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \text{ – вероятность того, то из урны будет извлечён красный шар}$$

$$p_{\text{ч}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \text{ – вероятность того, то из урны будет извлечён чёрный шар.}$$

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

Задача 2

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта? (решают самостоятельно)

Решение: $30 - 5 = 25$ холодильников не имеют дефекта. По классическому определению:

$$p = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \text{ – вероятность того, что наугад выбранный холодильник не имеет дефекта}$$

Ответ: $\frac{5}{6} \approx 0,8333$

Задача 3

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Примечание: ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)

Решение: сначала найдём общее количество исходов. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее не мудрить с **комбинаторикой** и воспользоваться **методом прямого перечисления исходов**. То есть, при оформлении решения просто записываем все комбинации: 01, 03, 05, 07, 09 10, 30, 50, 70, 90

И подсчитываем их – всего: 10 исходов.

Благоприятствующий исход один: верный номер.

По классическому определению: $p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$ – вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

Ответ: 0,1

Задача для самостоятельного решения:

Задача 4

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

Решение: найдём общее число исходов: $C_4^1 = 4$ способами можно выбрать место, на котором расположена сомнительная цифра **и на каждом** из этих 4 мест могут располагаться 2 цифры (семёрка или восьмёрка). По правилу умножения комбинаций, общее число исходов: $C_4^1 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$. Как вариант, в решении можно просто перечислить все исходы (благо их немного): 7555, 8555, 5755, 5855, 5575, 5585, 5557, 5558. Благоприятствующий

исход один (правильный пин-код). Таким образом, по классическому определению: $P = \frac{1}{8}$ – вероятность того, что абонент авторизуется с 1-й попытки

Ответ: $P = \frac{1}{8}$

Иногда перечисление комбинаций оказывается весьма кропотливым занятием. В частности, так обстоят дела в следующей, не менее популярной группе задач, где подкидываются 2 игральных кубика

Задача 5

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:

а) пять очков; б) не более четырёх очков; в) от 3 до 9 очков включительно.

Решение: найдём общее количество исходов:

$C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 1-го кубика и $C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 2-го кубика; по правилу умножения комбинаций, всего: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ возможных комбинаций. Иными словами, **каждая** грань 1-го кубика может составить упорядоченную пару с **каждой** гранью 2-го кубика. Условимся записывать такую пару в виде (a, b) , где a – цифра, выпавшая на 1-м кубике, b – цифра, выпавшая на 2-м кубике. Например:

$(3, 5)$ – на первом кубике выпало 3 очка, на втором – 5 очков, сумма очков: $3 + 5 = 8$

$(6, 1)$ – на первом кубике выпало 6 очков, на втором – 1 очко, сумма очков: $6 + 1 = 7$;

$(2, 2)$ – на обеих костях выпало 2 очка, сумма: $2 + 2 = 4$.

Очевидно, что наименьшую сумму даёт пара $(1, 1)$, а наибольшую – две «шестёрки».

а) Рассмотрим событие: A – при бросании двух игральных костей выпадет 5 очков. Запишем и подсчитаем количество исходов, которые благоприятствуют данному событию: $(1, 4); (4, 1); (2, 3); (3, 2)$

Итого: 4 благоприятствующих исхода. По классическому определению: $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ – искомая вероятность.

б) Рассмотрим событие: B – выпадет не более 4 очков. То есть, либо 2, либо 3, либо 4 очка. Снова перечисляем и подсчитываем благоприятствующие комбинации, слева я буду записывать суммарное количество очков, а после двоеточия – подходящие пары:

2 очка: $(1, 1)$

3 очка: $(1, 2); (2, 1)$

4 очка: $(1, 3); (3, 1); (2, 2)$

Итого: 6 благоприятствующих комбинаций. Таким образом: $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что выпадет не более 4 очков.

в) Рассмотрим событие: C – выпадет от 3 до 9 очков включительно. Здесь можно пойти прямой дорогой, но... что-то не хочется. Да, некоторые пары уже перечислены в предыдущих пунктах, но работы все равно предстоит много.

Как лучше поступить? В подобных случаях рациональным оказывается окольный путь. Рассмотрим **противоположное событие**: $\bar{C}$ – выпадет 2 или 10 или 11 или 12 очков.

В чём смысл? Противоположному событию благоприятствует значительно меньшее

2 очка: (1, 1)

10 очков: (4, 6); (6, 4); (5, 5)

11 очков: (5, 6); (6, 5)

количество пар 12 очков: (6, 6)

Итого: 7 благоприятствующих исходов.

По классическому определению: $P(\bar{C}) = \frac{7}{36}$ – вероятность того, что выпадет меньше трёх или больше 9 очков.

Далее пользуемся тем, что **сумма вероятностей противоположных событий** равна единице:

$P(C) + P(\bar{C}) = 1 \Rightarrow P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$ – вероятность того, что выпадет от 3 до 9 очков включительно.

Особо щепетильные люди могут перечислить все 29 пар, выполнив тем самым проверку.

а) $\frac{1}{9}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{29}{36}$

Ответ:

В следующей задаче повторим таблицу умножения:

Задача 6

Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:

а) будет равно семи; б) окажется не менее 20; в) будет чётным.

Решение: найдём общее количество исходов:

$C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ способами могут выпасть цифры на 2 кубиках.

а) Рассмотрим событие: A – при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи. Для данного события не существует благоприятствующих исходов, по классическому определению вероятности:

$P(A) = \frac{0}{36} = 0$, т.е. это событие является невозможным.

б) Рассмотрим событие: B – при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20. Данному событию благоприятствуют следующие исходы:

20 очков: (4, 5); (5, 4)

24 очка: (4, 6); (6, 4)

25 очков: (5, 5)

30 очков: (5, 6); (6, 5)

36 очков: (6, 6)

Итого: 8 По классическому определению:

$$P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \text{ – искомая}$$

вероятность.

в) Рассмотрим противоположные события:

C – произведение очков будет чётным;

$\bar{C}$ – произведение очков будет нечётным.

1 очко: (1, 1)

3 очка: (1, 3); (3, 1)

5 очков: (1, 5); (5, 1)

9 очков: (3, 3)

15 очков: (3, 5); (5, 3)

Перечислим все исходы, благоприятствующие событию $\bar{C}$: 25 очков: (5, 5) Итого: 9 благоприятствующих исходов.

$$P(\bar{C}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

По классическому определению вероятности: Противоположные события

образуют полную группу, поэтому: $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ – искомая вероятность.

а) 0, б) $\frac{2}{9}$, в) $\frac{3}{4}$

Ответ:

Задача 7

В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:

а) они выйдут на разных этажах б) двое выйдут на одном этаже в) все выйдут на одном этаже.

Следует отметить, что **случайность** здесь имеет место быть лишь с точки зрения стороннего наблюдателя (*т.к. человек обычно едет на вполне определённый этаж*).

Решение: вычислим общее количество исходов: $C_{19}^1 = 19$ способами может выйти из лифта 1-й пассажир и $C_{19}^1 = 19$ способами – 2-й пассажир и $C_{19}^1 = 19$ способами – третий пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 = 19 \cdot 19 \cdot 19 = 6859$ возможных исходов. То есть, **каждый** этаж выхода 1-го человека может комбинироваться с **каждым** этажом выхода 2-го человека и с **каждым** этажом выхода 3-го человека.

Второй способ основан на **размещениях с повторениями**: $A_{19(повт)}^3 = 19^3$ – кому как понятнее.

а) Рассмотрим событие: A – пассажиры выйдут на разных этажах. Вычислим количество благоприятствующих исходов: $A_{19}^3 = 17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814$ способами могут выйти 3 пассажира на разных этажах.

б) Рассмотрим событие: B – пассажиры выйдут на одном этаже. Данному событию благоприятствуют $C_{19}^1 = 19$ исходов и по классическому определению, соответствующая вероятность:

$$P(B) = \frac{19}{6859} = \frac{1}{361}.$$

Заходим с чёрного хода:

в) Рассмотрим событие: C – два человека выйдут на одном этаже (*и, соответственно, третий – на другом*).

События A, B, C образуют полную группу (считаем, что в лифте никто не уснёт и лифт не застрянет =)), а значит, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{306}{361} - \frac{1}{361} = \frac{54}{361}$$

В результате, искомая вероятность:

Таким образом, теорема о сложении вероятностей событий, образующих полную группу, может быть не только удобной, но и стать самой настоящей палочкой-выручалочкой!

а) $\frac{306}{361} \approx 0,8476$, б) $\frac{54}{361} \approx 0,1496$, в) $\frac{1}{361} \approx 0,0028$

Ответ:

Когда получаются большие дроби, то хорошим тоном будет указать их приближенные десятичные значения. Обычно округляют до 2-3-4 знаков после запятой.

Поскольку события пунктов «а», «бэ», «вэ» образуют полную группу, то есть смысл выполнить контрольную проверку, причём, лучше с приближенными значениями:

$0,8476 + 0,1496 + 0,0028 = 1$, что и требовалось проверить

Иногда по причине погрешности округлений может получиться 0,9999 либо 1,0001, в этом случае одно из приближенных значений следуют «подогнать» так, чтобы в сумме нарисовалась «чистая» единица.

Самостоятельно:

Задача 8

Подбрасывается 10 монет. Найти вероятность того, что:

а) на всех монетах выпадет орёл; б) на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка; в) орёл выпадет на половине монет.

Решение: вычислим общее количество исходов: $A_{2(мон)}^{10} = 2^{10} = 1024$ способами могут упасть 10 монет.

Другой путь: $C_2^1 = 2$ способами может упасть 1-я монета **и** $C_2^1 = 2$ способами может упасть 2-я монета **и** ... **и** $C_2^1 = 2$ способами может упасть 10-я монета. По правилу умножения

$$\underbrace{C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot \dots \cdot C_2^1}_{10 \text{ раз}} = 2^{10} = 1024$$

комбинаций, 10 монет могут упасть способами

а) Рассмотрим событие: A – на всех монетах выпадет орёл. Данному событию благоприятствует единственный исход, по классическому определению

вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{1024}.$$

б) Рассмотрим событие: B – на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка.

Существует $C_{10}^1 = 10$ монет, на которых может выпасть решка. По классическому определению вероятности:

$$P(B) = \frac{10}{1024} = \frac{5}{512}.$$

в) Рассмотрим событие: C – орёл выпадет на половине монет.

Существует $C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{120} = 252$ уникальных комбинаций из пяти монет, на которых может выпасть орёл. По классическому определению вероятности:

$$P(C) = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$$

а) $\frac{1}{1024} \approx 0,0010$, б) $\frac{5}{512} \approx 0,0098$, в) $\frac{63}{256} \approx 0,2461$

Ответ:

Ничего страшного, если не получаются какие-то задачи или отдельные пункты – главное, стремитесь РАССУЖДАТЬ, ДУМАЙТЕ (пусть и не всегда успешно). В теории вероятностей плохо работает принцип «если дано то-то, то решать нужно так-то». И следующий пример – хорошее тому подтверждение:

Задача 9

На семиместную скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Какова вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом?

Решение: с общим количеством исходов проблем не возникает:

$P_7 = 7! = 5040$ способами могут рассесться 7 человек на скамейке.

Но вот как подсчитать количество благоприятствующих исходов? Тривиальные формулы не подходят и единственный путь – это логические рассуждения. Сначала рассмотрим ситуацию, когда Саша и Маша оказались рядом на левом краю скамейки:

*	*					
---	---	--	--	--	--	--

Очевидно, что порядок имеет значение: слева может сидеть Саша, справа Маша и наоборот. Но это ещё не всё – **для каждого** из этих двух случаев остальные люди могут рассесться на свободных местах $5! = 120$ способами. Выражаясь комбинаторно, Сашу и Машу можно переставить на соседних местах $P_2 = 2!$ способами и для каждой такой перестановки других людей можно переставить $P_5 = 5! = 120$ способами.

Таким образом, по правилу умножения комбинаций, выходит $2! \cdot 5!$ благоприятствующих исходов.

Но и это ещё не всё! Перечисленные факты справедливы **для каждой** пары соседних мест:

*	*					
	*	*				
		*	*			
			*	*		
				*	*	
					*	*

Интересно отметить, что если скамейку «скруглить» (соединяя левое и правое место), то образуется дополнительная, седьмая пара соседних мест. Но не будем отвлекаться. Согласно

тому же принципу умножения комбинаций, получаем окончательное количество благоприятствующих исходов: $6 \cdot 2! \cdot 5!$

$$p = \frac{6 \cdot 2! \cdot 5!}{7!} = \frac{6 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

По классическому определению: $\frac{2}{7}$ – вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом.

Ответ: $\frac{2}{7} \approx 0,2857$

Трудная задача:

Задача 10

На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу две ладьи белого и чёрного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга?

Справка: шахматная доска имеет размер 8×8 клеток; черная и белая ладьи «бьют» друг друга, когда располагаются на одной горизонтали или на одной вертикали

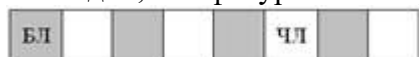
Обязательно выполните схематический чертёж доски, а ещё лучше, если неподалёку есть шахматы. Одно дело рассуждения на бумаге, и совсем другое – когда расставляешь фигуры собственными руками.

Способ первый: вычислим общее количество исходов: $A_{64}^2 = 63 \cdot 64 = 4032$ способами можно расставить двух ладей на доске.

$$C_{64}^2 = \frac{64!}{62! \cdot 2!} = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016$$

Другой вариант оформления: $P_2 = 2! = 2$ способами можно выбрать две клетки шахматной доски и $P_2 = 2! = 2$ способами поставить белую и чёрную ладью в **каждом** из 2016 случаев. Таким образом, общее число исходов: $C_{64}^2 \cdot P_2 = 2016 \cdot 2 = 4032$.

Теперь подсчитаем исходы, в которых ладьи «бьют» друг друга. Рассмотрим 1-ю горизонталь. Очевидно, что фигуры можно расставить на ней произвольным образом, например, так:



Кроме того, ладей можно переставить. Придаём рассуждениям числовую

$$C_8^2 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

форму: $P_2 = 2! = 2$ способами можно выбрать две клетки и $P_2 = 2! = 2$ способами переставить ладей в **каждом** из 28 случаев. Всего: $C_8^2 \cdot P_2 = 28 \cdot 2 = 56$ возможных расположений фигур на горизонтали.

Короткая версия оформления: $A_8^2 = 7 \cdot 8 = 56$ способами можно разместить белую и чёрную ладью на 1-й горизонтали.

Проведённые рассуждения справедливы для **каждой** горизонтали, поэтому количество комбинаций следует умножить на восемь: $8 \cdot A_8^2$. Кроме того, аналогичная история справедлива для любой из восьми вертикалей. Вычислим итоговое количество расстановок, в которых фигуры «бьют» друг друга:

$8 \cdot A_8^2 + 8 \cdot A_8^2 = 8 \cdot 56 + 8 \cdot 56 = 448 + 448 = 896$ Тогда в оставшихся вариантах расстановки ладьи не будут «бить» друг друга: $4032 - 896 = 3136$

$$p = \frac{3136}{4032} = \frac{7}{9}$$

По классическому определению вероятности: $\frac{7}{9}$ – вероятность того, что наугад поставленные на доску белая и чёрная ладья не будут «бить» друг друга.

Ответ: $\frac{7}{9} \approx 0,78$

Способ второй: $C_{64}^1 = 64$ способами можно поставить на доску одну ладью **и для каждого** из этих 64 случаев другая ладья может выставлена на любую из $C_{63}^1 = 63$ свободных клеток (проанализируйте, что это рассуждение учитывает все расстановки белой и черной ладей).

Таким образом, по правилу умножения комбинаций: $C_{64}^1 \cdot C_{63}^1 = 64 \cdot 63$ – общее число исходов. Для **каждого** из 64 способов расстановки одной ладьи она будет «бить» другую ладью, если последняя окажется на любой из 7 свободных клеток той же горизонтали или 7 свободных клеток той же вертикали (итого 14 клеток). Следовательно, существует $64 \cdot 14$ расстановок ладей, в которых они «бьют» друг друга. По классическому определению вероятности:

$q = \frac{64 \cdot 14}{64 \cdot 63} = \frac{2}{9}$ – вероятность того, что наугад поставленные на доску белая и чёрная ладья будут «бить» друг друга. Тогда вероятность противоположного события:

Ответ: $\frac{7}{9} \approx 0,78$

В заключительной части рассмотрим очень распространённый тип задач на классическое определение вероятности, который встречается чуть ли не в половине случаев:

Задача 11

Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

Решение: коль скоро неизвестный автор умолчал о колоде, будем считать, что в ней 36 карт. Ну а зачем нам больше? =)

Вычислим общее количество исходов. Сколькими способами можно извлечь 4 карты из колоды? Наверное, все поняли, что речь идёт о количестве сочетаний:

$$C_{36}^4 = \frac{36!}{32! \cdot 4!} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{24} = 58905$$

способами можно выбрать 4 карты из колоды.

Теперь считаем благоприятствующие исходы. По условию, в выборке из 4 карт должен быть один туз, один король и, о чём не сказано открытым текстом, – **две другие карты**:

$C_4^1 = 4$ способами можно извлечь одного туза; $C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одного короля.

Исключаем из рассмотрения тузов и королей: $36 - 4 - 4 = 28$

$$C_{28}^2 = \frac{28!}{26! \cdot 2!} = \frac{27 \cdot 28}{2} = 378$$

способами можно извлечь две другие карты.

По правилу умножения комбинаций: $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2 = 4 \cdot 4 \cdot 378 = 6048$ способами можно извлечь искомую комбинацию карт (одного туза **и** одного короля **и** две другие карты).

Прокомментирую комбинационный смысл записи $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2$ другим способом: **каждый** туз комбинируется с **каждым** королем и с **каждой** возможной парой других карт.

$$p = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2}{C_{36}^4} = \frac{6048}{58905} = \frac{96}{935}$$

По классическому определению: – вероятность того, что среди четырех сданных карт будет один туз и один король.

Если хватает времени и терпения, максимально сокращайте большие дроби.

Ответ: $\frac{96}{935} \approx 0,1027$

Задача для самостоятельного решения:

Задача 12

В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что:

- а) обе детали будут качественными; б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной; в) обе детали бракованные.

События перечисленных пунктов образуют полную группу, поэтому проверка здесь напрашивается сама собой. Краткое решение и ответ в конце урока. А вообще, всё самое интересное только начинается!

Решение: всего: $15 + 5 = 20$ деталей в ящике. Вычислим общее число исходов:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

способами можно извлечь 2 детали из ящика.

- а) Рассмотрим событие: A – обе извлечённые детали будут качественными.

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$$

способами можно извлечь 2 качественные детали.

$$P(A) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{105}{190} = \frac{21}{38}$$

По классическому определению вероятности:

- б) Рассмотрим событие: B – одна деталь будет качественной, а одна – бракованной

$$C_{15}^1 \cdot C_5^1 = 15 \cdot 5 = 75$$

способами можно извлечь 1 качественную деталь и 1 бракованную.

$$P(B) = \frac{C_{15}^1 \cdot C_5^1}{C_{20}^2} = \frac{75}{190} = \frac{15}{38}$$

По классическому определению:

- в) Рассмотрим событие: C – обе извлечённые детали бракованные.

$$C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

способами можно извлечь 2 бракованные детали.

$$P(C) = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$$

По классическому определению:

Проверка: вычислим сумму вероятностей событий, образующих полную

группу: $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{21}{38} + \frac{15}{38} + \frac{2}{38} = \frac{38}{38} = 1$, что и требовалось проверить.

Ответ: а) $\frac{21}{38}$, б) $\frac{15}{38}$, в) $\frac{1}{19}$

Следующая задача очень распространена и актуальна.

Задача 13

Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на два из трёх вопросов?

Решение: итак, расклад таков: всего 60 вопросов, среди которых 25 «хороших» и, соответственно, $60 - 25 = 35$ «плохих». Ситуация шаткая и не в пользу студента. Давайте узнаем, насколько хороши его шансы:

$$C_{60}^3 = \frac{60!}{57! \cdot 3!} = \frac{58 \cdot 59 \cdot 60}{6} = 34220$$

способами можно выбрать 3 вопроса из 60 (*общее количество исходов*).

Для того чтобы сдать экзамен, нужно ответить на 2 **или** 3 вопроса. Считаем благоприятствующие комбинации:

$$C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 = \frac{25!}{23! \cdot 2!} \cdot 35 = \frac{24 \cdot 25}{2} \cdot 35 = 10500$$

способами можно выбрать 2 «хороших» вопроса и один «плохой»;

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{6} = 2300$$

способами можно выбрать 3 «хороших» вопроса.

По **правилу сложения комбинаций**:

$$C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3 = 10500 + 2300 = 12800$$

способами можно выбрать благоприятствующую для сдачи экзамена комбинацию 3 вопросов По классическому определению:

$$p = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3}{C_{60}^3} = \frac{12800}{34220} = \frac{640}{1711}$$

– вероятность того, что студент сдаст экзамен.

$$\text{Ответ: } \frac{640}{1711} \approx 0,37$$

Популярная игра для самостоятельного исследования:

Задача 14

Игроку в покер сдаётся 5 карт. Найти вероятность того, что:

- а) среди этих карт будет пара десятков и пара валетов;
- б) игроку будет сдан флеш (5 карт одной масти);
- в) игроку будет сдано каре (4 карты одного номинала).

Какую из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить?

! Внимание! Если в условии задан подобный вопрос, то на него **необходимо** дать ответ.

В противном случае задание с высокой вероятностью не зачтут.

Справка: в покер традиционно играют 52-карточной колодой, которая содержит карты 4 мастей номиналом от «двоек» до тузов.

Решение: найдём общее число исходов:

$$C_{52}^5 = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{120} = 2598960$$

способами можно сдать 5 карт.

$$a) \quad C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \quad \text{способами можно сдать две десятки}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \quad \text{способами можно сдать двух валетов;}$$

Количество других карт в колоде: $52 - 4 - 4 = 44$

$$C_{44}^1 = 44 \quad \text{способами можно сдать другую карту.}$$

По правилу умножения комбинаций

$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^1 = 6 \cdot 6 \cdot 44 = 1584$ способами можно сдать 5 карт, среди которых будет пара десятков и пара валетов.

$$p = \frac{C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^1}{C_{52}^5} = \frac{1584}{2598960} \approx 0,0006$$

По классическому определению:

б) В колоде: $52 / 4 = 13$ карт каждой масти.

$$C_{13}^5 = \frac{13!}{8! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{120} = 1287 \quad \text{способами можно сдать 5 карт какой-то одной из мастей.}$$

По правилу сложения комбинаций:

$$C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 = 1287 + 1287 + 1287 + 1287 = 5148 \quad \text{способами можно сдать флеш (без разницы какой масти).}$$

$$p_{\#} = \frac{C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5}{C_{52}^5} = \frac{5148}{2598960} \approx 0,002$$

По классическому определению:

в) Четыре карты одного номинала можно сдать 13 способами (2222, 3333, 4444, ..., КККК, ТТТТ). Кроме того, для **каждого** из этих 13 случаев пятую карту можно сдать $C_{48}^1 = 48$ способами. Таким образом, по теореме умножения комбинаций, каре можно сдать $13 \cdot C_{48}^1 = 13 \cdot 48 = 624$ способами.

$$p_{\#} = \frac{13 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{624}{2598960} \approx 0,0002$$

По классическому определению:

Ответ: а) $\approx 0,0006$, б) $\approx 0,002$, в) $\approx 0,0002$

Из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить флеш.

Форма контроля: письменный отчет

Тема: Математическая статистика

Практическое занятие №7. Математическая статистика

Вариационные ряды и их характеристики. Основы математической теории выборочного метода. Дисперсионный, корреляционный, регрессионный анализ. Контрольная работа

Количество часов – 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Основные понятия: выборка, частота, относительная частота, эмпирическая функция, полигон, кумулята, гистограмма

Задание 1. Изучить теорию вопроса. Сделать краткий конспект

Задание 2. Контрольное задание

Рассмотреть решение задач. составить и решить задачи подобные задачам № 1, № 2

Изучение математической статистики начинается с определения таких понятий как «выборка», «частота», «относительная частота», «эмпирическая функция», «полигон», «кумулята», «гистограмма» и т.д. Далее идет изучение понятий оценок (смещенная и несмещенная): выборочная средняя, дисперсия, исправленная дисперсия и т.д.

Рассмотрим простейшую задачу данного типа.

Задача № 1

Измерение роста детей младшей группы детского сада представлено выборкой:

92, 96, 95, 96, 94, 97, 98, 94, 95, 96.

Найдем некоторые характеристики этой выборки.

Решение

Размер выборки (число измерений; N): 10.

Наименьшее значение выборки: 92. Наибольшее значение выборки: 98.

Размах выборки: $98 - 92 = 6$.

Запишем ранжированный ряд (варианты в порядке возрастания):

92, 94, 94, 95, 95, 96, 96, 96, 97, 98.

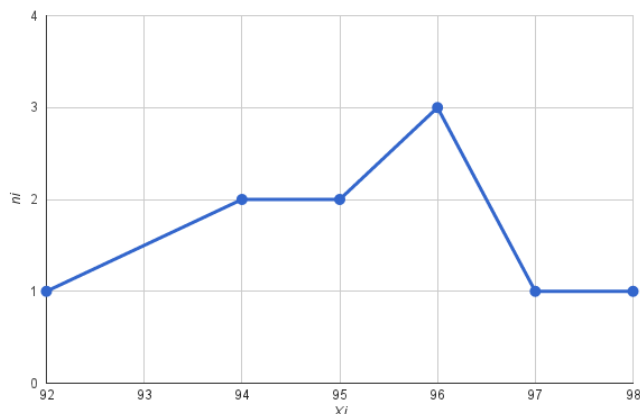
Сгруппируем ряд и запишем в таблицу (каждой variante поставим в соответствие число ее появлений):

x_i	92	94	95	96	97	98	N
n_i	1	2	2	3	1	1	10

Вычислим относительные частоты и накопленные частоты, результат запишем в таблицу:

x_i	92	94	95	96	97	98	Итого
n_i	1	2	2	3	1	1	10
$W_i = \frac{n_i}{n}$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	1
Накопленные частоты	1	3	5	8	1	10	

Построим полигон частот выборки (отметим на графике варианты по оси ОХ, частоты по оси ОУ, соединим точки линией).



Выборочную среднюю и дисперсию вычислим по формулам (соответственно):

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i n_i; \quad D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i.$$

$$\bar{x} = \frac{92 \cdot 1 + 94 \cdot 2 + 95 \cdot 2 + 96 \cdot 3 + 97 \cdot 1 + 98 \cdot 1}{10} = \frac{92 + 188 + 190 + 288 + 97 + 98}{10} = \frac{953}{10} = 9.53$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{10} \cdot ((92 - 9.53)^2 \cdot 1 + (94 - 9.53)^2 \cdot 2 + (95 - 9.53)^2 \cdot 2 + \\ &+ (96 - 9.53)^2 \cdot 3 + (97 - 9.53)^2 \cdot 1 + (98 - 9.53)^2 \cdot 1) = \\ &= \frac{1}{10} \cdot (6801.301 + 14270.36 + 14610.24 + 22431.18 + 7651.001 + \\ &+ 7826.941) = \frac{73591.03}{10} = 7359.103 \end{aligned}$$

Можно находить и другие характеристики выборки, но для общего представления вполне достаточно найденных характеристик.

Задачи на проверку статистических гипотез

Задачи, относящиеся к данному типу, сложнее задач предыдущего типа и их решение зачастую более объемно и трудоемко. Прежде чем приступать к решению задач, сначала изучаются понятия статистической гипотезы, нулевой и конкурирующей гипотезы и т.д.

Рассмотрим простейшую задачу данного типа.

Задача № 2

Даны две независимые выборки объема 11 и 14, извлеченные из нормальных совокупностей X , Y . Известны также исправленные дисперсии, равные соответственно 0,75 и 0,4. Необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий при уровне значимости $\gamma=0,05$. Конкурирующую гипотезу выбрать по желанию.

Решение

Нулевая гипотеза для нашей задачи записывается следующим образом:

$$H_0 : D(X) = D(Y).$$

В качестве конкурирующей гипотезы рассмотрим следующую:

$$H_1 : D(X) > D(Y).$$

Вычислим отношение большей исправленной дисперсии к меньшей и получим наблюдаемое значение критерия:

$$F_H = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{0.75}{0.4} = 1.875.$$

Так как конкурирующая гипотеза, которую мы выбрали, имеет вид $H_1 : D(X) > D(Y)$, то критическая область является правосторонней.

По таблице для уровня значимости 0,05 и числам степеней свободы равным 10 ($11 - 1 = 10$) и 13 ($14 - 1 = 13$) соответственно найдем критическую точку:

$$F_K(0.05; 10; 13) = 2.67.$$

Так как наблюдаемое значение критерия меньше критического значения ($1,875 < 2,67$), то нет оснований отвергнуть гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Таким образом, исправленные дисперсии различаются между собой незначимо. Рассмотренная задача не проста на первый взгляд, но вполне стандартна и решается по шаблону. Друг от друга такие задачи

отличаются, как правило, значениями критериев и критической областью. Более трудоемкими (так как содержат много вычислений, часть из которых сводится в таблицы) являются задачи на проверку гипотезы о типе распределения генеральной совокупности. При решении таких задач используются различные критерии, например, критерий Пирсона.

Задачи определения вида закона распределения по статистическим данным

Данный тип задач относится к разделу, изучающему элементы теории корреляции. Если рассматривать зависимости Y от X , то тогда можно было бы вспомнить метод наименьших квадратов для определения вида зависимости. Однако в математической статистике все гораздо сложнее и в теории корреляции рассматриваются двумерные величины, значения которых, как правило, задаются в виде таблиц.

	x_1	x_1	...	x_n	n_y
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{n1}	$\sum_{j=1}^n n_{j1}$
y_1	n_{12}	n_{22}	...	n_{n2}	$\sum_{j=1}^n n_{j2}$
...	...	...	...	...	...
y_m	n_{1m}	n_{2m}	...	n_{nm}	$\sum_{j=1}^n n_{jm}$
n_x	$\sum_{i=1}^m n_{1i}$	$\sum_{i=1}^m n_{2i}$	...	$\sum_{i=1}^m n_{ni}$	N

Приведем формулировку одной из задач данного раздела.

Задача

Определить выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X . Данные приведены в корреляционной таблице.

Y	X				n_y
	10	20	30	40	
5	1	3			4
6		2	1		3
7			3	2	5
8				1	1
n_x	1	5	4	3	$N=13$

Форма контроля: письменный отчет

Раздел 3. Элементы линейной алгебры

Тема. Элементы линейной алгебры.

Практическое занятие № 8 Определители квадратных матриц, свойства определителей. Системы линейных уравнений и их решение

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. Повторение основных теоретических положений.

Задание 2. Практическая работа

1. Найти произведение матриц ABC , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц ABC, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x - 8y + 6z = 5, \\ -5x + 4y + 3z = 12, \\ 7x + 2y - 5z = -4. \end{cases}$$

Форма контроля: письменная работа

Тема. Контрольная работа
Практическое занятие № 9
Количество часов – 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

I вариант

1. Даны множества: $A = \{1, 6, 3, 8, 7\}$ и $B = \{1, 8, 2, 6, 7\}$.

Найти: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

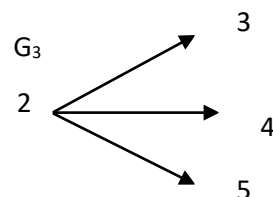
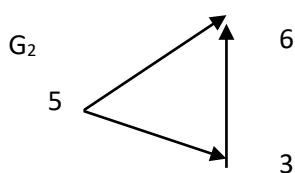
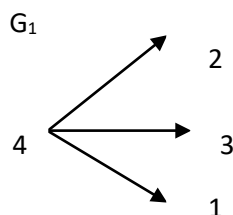
2. Изобразить в прямоугольной системе координат декартово произведение множеств $X * Y$, если:

- $X = [-1, 5]$, $Y = [-1, 5]$
- $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 7]$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x - x^2, \quad y = x^2$$

4. Построить матрицы смежности и инцидентности графа $G: G_1 \cup G_2 \cup G_3$



5. Найти производную функции: $f(x) = \sqrt{41x^2 - 21x + 16}$; $f(x) = \frac{7}{(6+4x)^7}$

6. Вычислите интеграл:

$$1). \int_1^4 \sqrt{x} dx; \quad 2). \int_0^1 (x^2 + 1) dx; \quad 3). \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x}; \quad 4). \int_{-1}^1 (2x^2 - 5x - 7) dx;$$

7. Два события называются несовместными, если... . Привести пример.

8. Дать определение числового ряда. Пример.

9. Докажите, что функция $y = 7e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y' = -2y$.

II вариант

1. Даны множества: $A = \{4, 20, 30, 40, 78\}$ и $B = \{30, 78, 4\}$

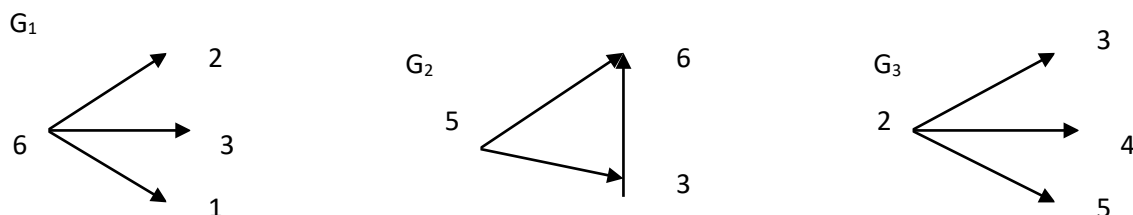
Найти: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

2. Изобразить в прямоугольной системе координат декартово произведение множеств $X * Y$, если:
 $X = [-6; 6]$, $Y = [-2, 2]$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x, \quad y = x^2$$

4. Построить матрицы смежности и инциденции графа $G: G_1 \cup G_2 \cup G_3$



5. Найти производную функции: $f(x) = \sqrt{41x^2 - 21x + 16}$; $f(x) = \frac{7}{(6 + 4x)^7}$;

6. Вычислите интеграл:

$$1). \int_0^3 5dx; \quad 2). \int_2^7 \frac{dx}{x^7}; \quad 3). \int_1^4 (3 - 2x)dx; \quad 4). \int_0^2 (2x^2 - x - 1)dx;$$

7. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются равновероятными, если Привести пример.

8. Гармонический ряд, определение. Пример.

9. Докажите, что функция $y = 5e^{3x}$ удовлетворяет уравнению $y' = 3y$.

Форма контроля: письменный отчет

Раздел 3. Элементы линейной алгебры

Практическое занятие №10. Повторение . Решение упражнений.

Методические рекомендации по выполнению

1. Найти произведение матриц ABC , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц ABC, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 59 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 39 \\ 83 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 59 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} 23 \\ 59 \end{pmatrix}.$$

7. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 12, \\ -7x + 9y + 3z = -6, \\ 3x + 4y - 2z = 9. \end{cases}$$

8. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 12, \\ -7x + 9y + 3z = -6, \\ 3x + 4y - 2z = 9. \end{cases}$$

9. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x - 5y + 6z = 11, \\ -9x + 2y + 3z = 9, \\ 5x + y - 4z = -8. \end{cases}$$

10. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x - 8y + z = 7, \\ -5x + 4y + 2z = -10, \\ 2x + 7y - 3z = 6. \end{cases}$$

11. Найдите произведение матриц AB

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. Найдите произведение матриц AB

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$

14. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$

15. Найдите матрицу, обратную к данной: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$

16. Найдите матрицу, обратную к данной: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

Форма контроля: письменный отчет

3. Критерии оценки Критерии устного ответа

1. **Оценка «отлично»** ставится, если ответы на все вопросы полные, аргументированные и обстоятельные. Высказываемые положения подтверждены конкретными примерами; сделаны выводы.
2. **Оценка «хорошо»** ставится, если даны ответы на все вопросы раскрыты определения и понятия. Нет подтверждения теоретических положений практическими примерами. Выводы не достаточно доказательны.
3. **Оценка «удовлетворительно»** ставится, если ответы на все вопросы недостаточно полные и аргументированные или выполнено 50% заданий. Нет достаточного количества примеров, позволяющих судить об освоении профессиональных компетенций на должном уровне. Выводов нет или они не достаточно обоснованы.
4. **Оценка «неудовлетворительно»** – ставится, если вопросы не раскрыты.

Критерии письменного ответа (теста)

- 85 – 100 % правильных ответов – отлично
- 70 – 84 % правильных ответов – хорошо
- 52 – 69% правильных ответов – удовлетворительно
- 0 – 51 % правильных ответов – неудовлетворительно

Список литературы

Основные источники:

1. Баврин.И.И. Математика. М.: Издательство Юрайт, 2025. 568 с. - <https://urait.ru/viewer/matematika-561217#page/11>
2. Богомолов Н.В. Математика. Задачи с решениями. Часть 1: учеб. пособие для СПО. М.: Издательство Юрайт, 2025. 439 с. - <https://urait.ru/viewer/matematika-581714>
3. Богомолов Н.В. Математика. Задачи с решениями. Часть 2: учеб. пособие для СПО. М.: Издательство Юрайт. 2025. 320 с. - <https://urait.ru/viewer/matematika-zadachi-s-resheniyami-568499>
4. Гисин В.Б., Кремер Н.Ш. Математика практикум для СПО. М.: Издательство Юрайт, 2024. 202 с.
5. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. Учебник для СПО. М.: Academia, 2025. 416 с.
6. Дадаян А.А. Сборник задач по математике: учеб. пособие. М.: Форум Инфра-М, 2024. 352 с.
7. Дорофеева А.В. Математика. Сборник задач: учебник и практикум для СПО. М.: Издательство Юрайт. 2025. 420 с.- <https://urait.ru/viewer/matematika-561190>
8. Кремер Н.Ш. Математика для колледжей. М.: Издательство Юрайт, 2025. 196 с. - <https://urait.ru/viewer/matematika-dlya-kolledzhey-560553#page/1>
9. Щипачев В С. Математика: Учебник и практикум для СПО. М.: Издательство Юрайт. 2024. 447 с.
10. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Издательство Юрайт, 2025. 344 с. - <https://urait.ru/viewer/vyshshaya-matematika-581814>

Дополнительные источники:

1. Дубинский Ю.А., Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для среднего профессионального образования. М.: ИЦ Академия, 2024. 320с.
2. Курбатова Э., Омельченко В. Математика: учебник. М.: Феникс, 2024. 384с
3. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник. М.: Мастерство, 2024. 320 с.
4. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Математика: Учебник для СПО. М.: Просвещение, 2024. 360 с.
5. Стойлова, Л.П. Математика. Сборник задач: Учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования / Л.П. Стойлова, Е.А. Конобеева, Т.А. Конобеева. - М.: ИЦ Академия, 2024. 240 с.

Интернет-ресурсы:

1. http://www.exponenta.ru/educat/links/1_educ.asp#0 – Полезные ссылки на сайты математической и образовательной направленности: Учебные материалы, тесты
2. <http://mathsun.ru/> – Биографии великих математиков.
3. <http://festival.1september.ru/>
4. <http://www.fepo.ru>
5. www.mathematics.ru